Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Buenos Aires

SEMINARIO UNIVERSITARIO 2024

EXAMEN FINAL - 18/03/2024

Apellido y Nombre: ....

Número de Documento: .... Especialidad:..

TEMA 1

1		2		3		4		5	NOTA

- La duración del examen es de 150 minutos.
- Condición mínima de aprobación (6 puntos): 50% del examen bien resuelto.
- Todas las respuestas deben estar JUSTIFICADAS.

EJERCICIO 1: Sean las funciones $f : \mathbb{R} \to Im_f$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{3}\, 2^{-x+3} + 1$ y $g : D_f \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \sqrt{x + 2\beta} - 3$.

(a) Determinar $f^{-1}(x)$ indicando su dominio e imagen.

(b) Calcular el o los valores reales de β, si existen, para que $\left(g \circ f^{-1}\right)(11/3) = 8$.

EJERCICIO 2: Se sabe que b es una raíz doble del polinomio

$$p(x) = x^3 + (3 - 2b)x^2 - 8x + 3b^2$$

(a) Determinar todos los valores positivos de b.

(b) Para cada uno de los valores de b hallados, factorizar el polinomio $p(x)$.

EJERCICIO 3:

(a) Sea $f : D_f \to \mathbb{R} / f(x) = \log_3\left(2x - |x^2 - 4|\right)$. Calcular el dominio de f.

(b) Resolver la ecuación

$$\cos^2 x - 3\,\mathrm{sen}^2 x = -1$$

en el intervalo $[0,\, 2\pi]$

EJERCICIO 4:

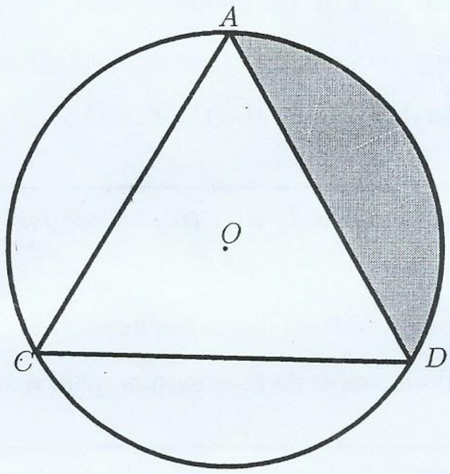
(a) Tres fuerzas coplanares actúan sobre una partícula, las mismas son:

$$\vec{F}_1 = (20\,i - 36\,j)N; \quad \vec{F}_2 = (-17\,i + 28\,j)N; \quad \vec{F}_3 = (12\,i)N$$

Hallar las componentes de la fuerza resultante y su módulo.

(b) Sean los vectores $\vec{v} = (k, -2)$ y $\vec{w} = (2, k+1)$. Determinar todos los valores reales de k para los cuales el coseno del ángulo entre los vectores sea igual a $-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

EJERCICIO 5: El triángulo equilátero ABC está inscripto en la circunferencia de centro en O y radio $6\,cm$. Calcular el área de la región sombreada.



Seminario Universitario	Final	Tema 1	Hoja Nº 1 18-3-24

① Sean las funciones $f: \mathbb{R} \to Imf$ tal que $f(x) = \frac{1}{3} 2^{-x+3} + 1$
y $g: Df \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \sqrt{x+2\beta} - 3$

a) Determinar $f^{-1}(x)$ indicando dominio e imagen

$$y = f(x) = \frac{1}{3} 2^{-x+3} + 1 \longrightarrow y-1 = \frac{1}{3} 2^{-x+3}$$

$$3(y-1) = 2^{-x+3}$$

$$3y-3 = 2^{3-x}$$

$$\log_2(3y-3) = \log_2(2^{3-x})$$

$$\log_2(3y-3) = (3-x)\underbrace{\log_2(2)}_{1}$$

$$x = -\log_2(3y-3) + 3$$

$$x = \log_2[(3y-3)^{-1}] + 3$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{1}{3y-3}\right) + 3} \to Df^{-1} \Rightarrow \frac{1}{3y-3} > 0 \quad \boxed{y \neq 1}$$

$$3y-3 > 0 \to \boxed{y > 1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Df^{-1} = (1, +\infty) \\ Imf^{-1} = \mathbb{R} \end{array}}$$

$$\boxed{f^{-1}: (1, +\infty) \to \mathbb{R}}$$

b) Calcular el o los valores reales de β, si existen, para que $g \circ f^{-1}\left(\frac{11}{3}\right) = 8$

$$g \circ f^{-1}\left(\frac{11}{3}\right) = g\left(f^{-1}\left(\frac{11}{3}\right)\right) = g\Bigg(\underbrace{\log_2\Big(\overbrace{\frac{1}{3 \cdot \frac{11}{3} - 3}}^{1/8}\Big)}_{-3} + 3\Bigg) = \boxed{g(0) = 8}$$

$$g(0) = \sqrt{0 + 2\beta} - 3 = 8 \to \sqrt{0+2\beta} = 11 \to \overbrace{0 + 2\beta}^{\geq 0} = 11^2$$

$$2\beta = 11^2 \to \beta = \frac{11^2}{2} = \frac{121}{2} \qquad \boxed{\beta = \frac{121}{2}}$$

2) Se sabe que b es una raiz doble del polinomio

$$p(x) = x^3 + (3-2b)x^2 - 8x + 3b^2$$

a) Determinar todos los valores positivos de b.

b es raiz doble $\rightarrow q_1(x) = x-b \mid p(x)$

x Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc}
x^3 & 1 & 3-2b & -8 & 3b^2 \\
b & & b & 3b-b^2 & -8b+3b^2-b^3 \\
\hline
x^2 & 1 & 3-b & -8+3b-b^2 & \boxed{-b^3+6b^2-8b} = 0 \\
b & & b & 3b & \\
\hline
 & 1 & 3 & \boxed{-8+6b-b^2} = 0 &
\end{array}$$

$(x+3)$

$\boxed{r=-3}$

$-b^2+6b-8=0 \rightarrow b_1 = 4,\ b_2 = 2$

$\boxed{b = \{2;4\}}$

$\underbrace{b}_{=0}\underbrace{(-b^2+6b-8)}_{=0}$

$b = 0 \rightarrow$ No es raiz doble

b) Para cada uno de los valores de b hallados, factorizar p(x)

$b=2 \Rightarrow p(x) = (x-2)^2(x+3)$

$b=4 \rightarrow p(x) = (x-4)^2(x+3)$

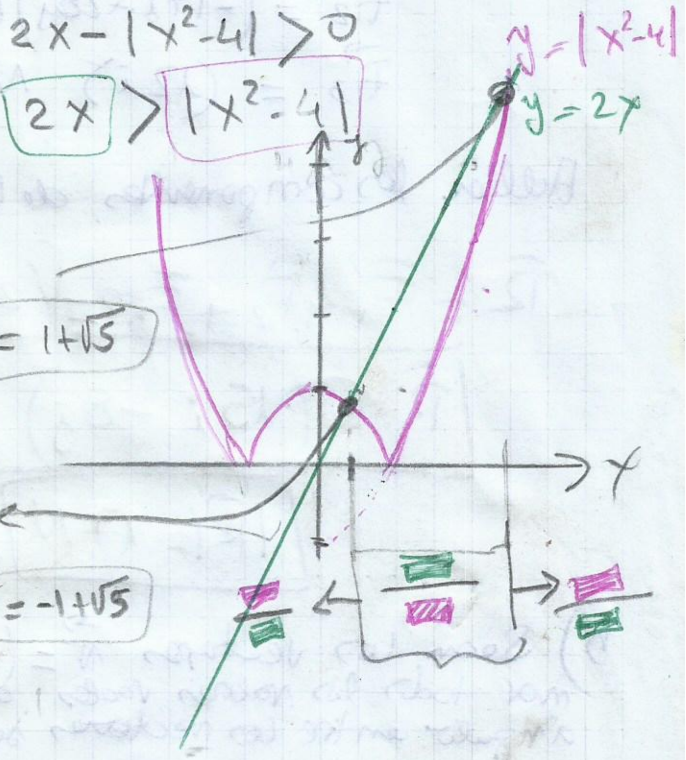
Seminario Universitario	Final	tema 1	2 18-3-24

(3) a) Sea $f: D_f \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = \log_3(2x - |x^2-4|)$

Calcular el dom. de f.

$$f(x) = \log_3(2x - |x^2-4|) \to 2x - |x^2-4| > 0$$

$$\boxed{2x} > \boxed{|x^2-4|}$$



$$2x = x^2-4$$
$$= x^2 - 2x - 4$$
$$\hookrightarrow \boxed{x = 1+\sqrt{5}}$$

$$\boxed{D_f = (-1+\sqrt{5}\,;\,1+\sqrt{5})}$$

$$2x = -x^2+4$$
$$0 = -x^2-2x+4$$
$$\hookrightarrow \boxed{x = -1+\sqrt{5}}$$

✓

b) Resolver la ecuación

$$\underbrace{\cos^2(x)} - 3\,\mathrm{sen}^2(x) = -1 \quad \text{en } [0, 2\pi]$$

$$1 - \mathrm{sen}^2(x) - 3\,\mathrm{sen}^2(x) = -1$$

$$2 = 4\,\mathrm{sen}^2(x) \to \boxed{\mathrm{sen}^2(x) = \frac{1}{2}}$$

$$|\mathrm{sen}(x)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\right\}}$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\arcsin\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

④ a) Tres fuerzas coplanares actúan sobre una partícula. Las mismas son:

$$\vec{F}_1 = (20i - 36j)\ N$$
$$\vec{F}_2 = (-17i + 28j)\ N$$
$$\vec{F}_3 = (12i)\ N$$

Hallar las componentes de la fuerza resultante y su módulo

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = \left[(20i - 17i + 12i) + (-36j + 28j + 0j)\right] N$$

$$\boxed{\bar{R} = (15i - 8j)\ N} \qquad |\bar{R}| = \sqrt{15^2 + (-8)^2} = 17$$

$$\boxed{|\vec{R}| = 17\,N}$$

b) Sean los vectores $\vec{v} = (k, -2)$ y $\vec{w} = (2, k+1)$. Determinar todos los valores reales de k para los cuales el coseno del ángulo entre los vectores sea igual a $\frac{-1}{\sqrt{5}}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|\ \|\vec{w}\|}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{(k, -2)\ (2, k+1)}{\sqrt{k^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (k+1)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\cancel{2k} - \cancel{2k} - 2}{\sqrt{k^2+4}\ \sqrt{4 + k^2 + 2k + 1}} = \frac{-2}{\sqrt{(k^2+4)\ (k^2 + 2k + \ )}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\underbrace{k^4 + 2k^3 + 5k^2 + 4k^2 + 8k + 20}}} = \frac{-1}{-2\sqrt{5}} = \frac{1}{\underbrace{2\sqrt{5}}} = \frac{1}{\sqrt{20}}$$

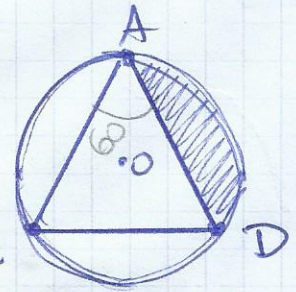
$$k^4 + 2k^3 + 9k^2 + 8k + \cancel{20} = \cancel{20}$$

$$\underbrace{k}_{=0}\ \underbrace{(k^3 + 2k^2 + 9k + 8)}_{=0 \ \rightarrow\ k = -1 \ +2 \text{ imag}} = 0$$

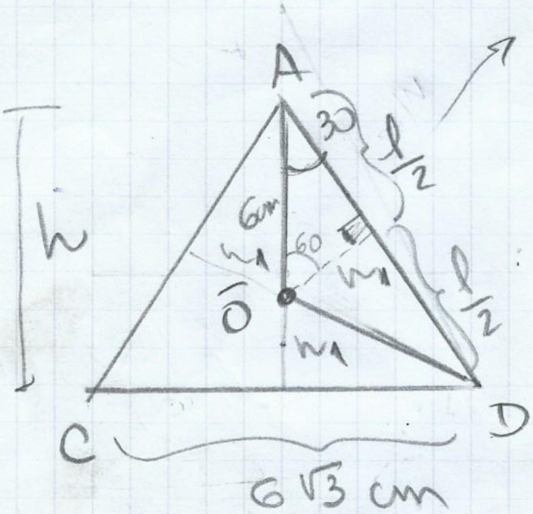
$$\boxed{k = 0 \quad k = -1}$$

Seminario Universitario | Final | tema 1 | 3 | 18-3-24

(5) El triángulo equilátero ABC está inscripto en la circunferencia de centro en $\bar{O}$ y radio 6cm
Calcular el área de la región sombreada



$$A_r = \pi \cdot (6cm)^2 = \boxed{36\pi\ cm^2}$$



$$\cos(30°) = \frac{l/2}{6cm} \Rightarrow \cos(30°) \cdot 6cm \cdot 2 = l$$

$$\boxed{l = 6\sqrt{3}}$$

$$sen(30°) = \frac{h_1}{6cm} \Rightarrow h_1 = sen(30°)\, 6cm$$

$$\boxed{h_1 = 3cm}$$

$$h = h_1 + r = 9cm$$

$$\text{Área } \Delta = \frac{\overset{l}{b} \cdot h}{2} = \frac{6\sqrt{3}\,cm \cdot 9cm}{2} = 27\sqrt{3}\,cm^2$$

$$A = \frac{A_{\bullet} - A_{\blacktriangle}}{3} = \frac{36\pi\,cm^2 - 27\sqrt{3}\,cm^2}{3} = 22{,}11\,cm^2$$

$$\boxed{A = 22{,}11\,cm^2}$$